Une approche dynamique de la conjecture de Riemann d'après Bost et Connes

F. Desnoyer

Résumé

Il s'agit ici de présenter les travaux de Bost et Connes sur la fonction ζ de Riemann en suivant la présentation de Paula B. Cohen, [Coh00].
Les deux premières parties posent les notations nécessaires à l'énoncé du problème de Bost-Connes, dans les trois dernières parties nous donneront des idées sur les outils qui ont permis à Bost et Connes de résoudre ce problème.

Table des matières

Motivation **2**

Introduction : Fonction ζ de Riemann **2**

1 Systèmes Dynamiques Statistiques **3**
- 1.1 Système Statistique Quantique : le cas élémentaire 3
- 1.2 Fonction de Partition et Groupe des Symétries 3
- 1.3 Sur la rupture spontanée de symétrie... 4
- 1.4 $\mathbb{C}^*$-algèbres 4

Le Problème Posé **5**

2 Equilibres KMS_β **5**

3 Quelques éléments du système dynamique de Bost-Connes **5**
- 3.1 Fonction de Partition du système 5
- 3.2 L'algèbre $\mathcal{A}$ du système 6
- 3.3 Evolution Hamiltonienne du Système 6

4 Le Système Dynamique de Bost-Connes : ses symétries **6**

Une conclusion de cette approche **7**

Références **7**

Motivation

Notre motivation pour ce petit exposé est la suivante : on s'intéresse ici à une direction nouvelle sur l'hypothèse de Riemann, une direction qui unifie des approches algébriques et analytiques, commutatif et non-commutatif.
En effet, on ne le verra pas apparaître ici, mais les systèmes dynamiques impliqués utilise des propriétés algébriques abstraites des corps de classes, adèles et idèles qui appartiennent à l'algèbre classique (commutative), dans un même temps, l'approche que nous choisissons de mettre en valeur ici est liée aux systèmes dynamiques abstraits, à la théorie ergodique non-commutative, aux algèbres de Von Neumann.
Cette approche met en jeu de belles mathématiques moins "'classiques"' que les approches traditionnelles (les plus arithmétiques) et très transversales.
Il faut lire ce petit exposé comme un hommage au travail des auteurs cités [BoC95] et [Coh00] et aux belles mathématiques qu'ils exposent. En souhaitant vous donner envie d'en lire plus, bonne lecture.

Introduction : Fonction ζ de Riemann

La fonction ζ qui est au coeur de la conjecture de Riemann est, historiquement, définie ainsi:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}, Re(s) > 1$$

On prolonge analytiquement la fonction ζ à $\mathbb{C} - \{1\}$ par

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 \frac{x^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x}$$

et comme on le voit, il y a les nombres de Bernoulli qui ne sont pas loins de cette histoire, puisque l'on va avoir, moyennant la définition suivante :

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m z^m}{m!}$$

l'égalité $\zeta(-n) = \frac{(-1)^n B_{n+1}}{n+1}$ et puisque les nombre de Bernoulli d'indices impairs sont nuls, les zéros dits triviaux de la fonction ζ qui sont les nombres de la forme $-2k, k \in \mathbb{N}$.

Si l'on pose $\xi(s) = \Gamma(\frac{s}{2}+1)\pi^{\frac{-s}{2}}(s-1)\zeta(s)$, alors cette fonction vérifie l'équation fonctionnelle:

$$\xi(s) = \xi(1-s)$$

ce qui amène naturellement à espérer la symétrie autour de la droite $Re(s) = \frac{1}{2}$ et amène (de manière non-triviale) à la conjecture de Riemann:

CONJECTURE 1 (Riemann)
Tous les zéros non-triviaux de ζ sont situés sur la droite $Re(s) = \frac{1}{2}$.

Cette conjecture a pour conséquence le fait suivant:

CONJECTURE 2 (Distribution des nombres premiers)
$\forall \varepsilon > 0$, $\forall x$ suffisament grand (!), $\frac{\pi(x)}{Li(x)} < 1 + x^{\varepsilon - \frac{1}{2}}$ où $Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{ln(t)}$ est le logarithme intégral de x.

1 Systèmes Dynamiques Statistiques

1.1 Système Statistique Quantique : le cas élémentaire

On considère l'espace préhilbertien $\mathbb{C}^n$, les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ sont interprétés comme "'les évènements élémentaires"' du système statistique.

Les évènements classiques sont alors les éléments de $\mathcal{D} = diag(\mathbb{C},n)$ (matrices diagonales de $\mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$). Les matrices E_{ij} qui forment la base canonique de $\mathcal{A}$ sont des évènements mutuellement indépendants (c'est-à-dire qui commutent pour le produit usuel de matrices).

DEFINITION 1

1. *On appelle Etat Quantique toute matrice $P \in \mathcal{A}$ telle que $P = P^* = P^2$.*

2. *Deux évènements quantiques seront dépendants si $EF - FE \neq 0$.*
3. *Une matrice M est positive si $\forall u \in \mathbb{C}^n$, $< Mu,u > \geq 0$.*
4. *Un Etat sur $\mathcal{A}$ est une matrice ρ telle que ρ positive et $Tr(\rho) = 1$.*

L'analogue de la notion de probabilité est alors données par la définition suivante:

DEFINITION 2
Soit ρ un état sur $\mathcal{A}$ alors la forme linéaire ψ définie par $\forall M \in \mathcal{A}, \psi(M) = Tr(\rho M)$ est une forme linéaire positive et pour toute projection E on dit que $\psi(E)$ est la probabilité de E.

Pour ce qui est des variables aléatoires, on utilise les matrices hermitiennes:

DEFINITION 3
Soit M une matrice hermitienne ($M = M^*$) alors $\psi(M)$ est appelée Espérance de M ou valeur attendue de M dans l'état ρ.

1.2 Fonction de Partition et Groupe des Symétries

Une Evolution Hamiltonienne du système est une évolution qui prend la forme

$$\forall M \in \mathcal{A}, \forall t \in \mathbb{R}, \sigma_t(M) = e^{itH_0} M e^{-itH_0}$$

avec H_0 une matrice hermitienne donnée, en particulier cette évoution hamiltonienne conserve la trace, donc ces évoltuions se font sur des iso-"'traces"'. On pourra se rappeler que les systèmes dynamiques classiques hamiltoniens sont régis par des règles similaires.

On envient alors à des considérations de physique : on cherche la mesure attendue de la quantité observable (càd M hermitienne) du système en équilibre à la température $T = \frac{1}{k\beta}$, le résultat attendu est $\varphi(M)$, Etat de Gibbs du système.
On rappelle que $k \approx 1{,}38 \times 10^{-23} JK^{-1}$ désigne la constante de Boltzmann issue de la thermodynamique classique.

DEFINITION 4
Soit M une observable du système régi par σ_t définie comme ci-dessus alors l'Etat de Gibbs du système est

$$\varphi(M) = \frac{Trace(Me^{-\beta H_0})}{Trace(e^{-\beta H_0})}$$

La quantité $Trace(e^{-\beta H_0})$ est appelée fonction de partition du système notée Z_{H_0}.

1.3 Sur la rupture spontanée de symétrie...

Dans les systèmes physiques on constate que l'entropie grandissant, les symétries s'amenuisent, par exemple dans le cas d'un métal magnétique, le groupe $SO(3,\mathbb{R})$ agit sur le métal, pour β petit, donc à haute température, le orientations des aimants sont identiquement distribuées et $SO(3,\mathbb{R})$ agit transitivement sur le métal (on peut toujours trouver un aimant dans une direction donnée, enfin, pour un physicien...!), β augmentant, le métal refroidit et la symétrie va disparatre à une certaine température critique T_0. (Bon là c'est de la physique.)

1.4 $\mathbb{C}^*$-algèbres

Il n'est pas possible d'exposer ici TOUTE la théorie des $\mathbb{C}^*$-algèbres, théorie riche et au-delà du but de cet exposé.

DEFINITION 5 (Préliminaires)
Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ l'espace des applications linéaires continues de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$,
$\mathfrak{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est dite involutive si $\forall S \in \mathfrak{A}$, $S^* = S$,
$\mathfrak{A}' = \{S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) / SM = MS, \forall M \in \mathfrak{A}\}$.

DEFINITION 6 (Algèbre de Von Neumann)
Une sous-algèbre $\mathfrak{A}$ de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, involutive et telle que $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}$ est appelée une algèbre de Von Neumann. C'est un cas particulier de $\mathbb{C}^*$-algèbre.

Pour le principe donnons une définition de $\mathbb{C}^*$-algèbre:

DEFINITION 7 ($\mathbb{C}^*$-algèbre)
Une sous-algèbre involutive de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, normiquement fermée est appelée une $\mathbb{C}^*$-algèbre d'opérateurs de $\mathcal{H}$.

La vraie difficulté se cache dans l'étude des exemples d'algèbres de Von Neumann et, ce fût l'essentiel des réalisations d'Alain Connes dans sa thèse, la classification de ces algèbres (en fait de leurs facteurs).

Le Problème Posé

Construire un système dynamique $(\mathcal{A},\sigma_t)$ dont la fonction de partition soit $\zeta(\beta)$ avec une rupture spontanée de symétrie au pôle $\beta = 1$ et ayant pour groupe de symétrie un groupe de symétrie naturel.

La dernière partie de ce problème est, naturellement, assez vague, il paraissait difficile de prescrire un groupe de symétrie à un tel système dynamique, et de fait, on pourra constater, a posteriori, que le groupe de symétrie de ce système dynamique est... pour le moins brutal.

2 Equilibres KMS_β

Les équilibres KMS_β sont des objets issus de la théorie des Algèbres de Von Neumann ($\mathbb{C}^*$-algèbres). Un état d'équilibre est ici défini par la condition de Kumo-Martin-Schwinger à la température inverse β. Le sujet apparaît beaucoup dans les mathématiques liées à la physique actuelle. Intuitivement, il semble s'agir d'un problème de déformation holomorphe entre deux états dépendants.
Nous nous contenterons d'une seule définition :

DEFINITION 8 (KMS_β)
Soit $(\mathcal{A},\sigma_t)$ un système dynamique avec $\mathcal{A}$ une $\mathbb{C}^*$-algèbre, σ_t un groupe à un paramètre d'automorphismes de $\mathcal{A}$. Pour $\beta > 0$, un état φ est un état KMS_β si et seulement si il existe une fonction holomorphe $F_{x,y}$ holomorphe dans la bande $0 < Im(z) < \beta$ et continue au bord qui permet de passer de $x\sigma_t(y)$ à $\sigma_t(y)x$ c'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_{x,y}(t) = \varphi(x\sigma_t(y)) \qquad F_{x,y}(t+i\beta) = \varphi(\sigma_t(y)x)$$

3 Quelques éléments du système dynamique de Bost-Connes

3.1 Fonction de Partition du système

Soit $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{N})$, l'espace de Hilbert des suites de carré sommable, on considère l'opérateur H défini sur la base canonique de $\mathcal{H}$ par $H\varepsilon_n = ln(n)\varepsilon_n$.

Remarquons que $D(H) \subset \mathcal{H}$ mais que cet opérateur n'est pas défini pour tous les éléments de $\mathcal{H}$ puisqu'il n'y a aucune raison que si $u \in \mathcal{H}$ on ait $Hu \in \mathcal{H}$, on pourra penser à $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}ln(n)}$ qui est dans $\mathcal{H}$ mais pour laquelle $Hu \notin \mathcal{H}$.

PROPOSITION 1
$Z_H = \zeta$

En effet,

$$Z_H(\beta) = Trace(e^{-\beta H}) = \sum_{n\geq 1} < e^{-\beta H}\varepsilon_n,\varepsilon_n >= \sum_{n\geq 1} n^{-\beta}\|\varepsilon_n\|^2 = \zeta(\beta)$$

3.2 L'algèbre $\mathcal{A}$ du système

Soit $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ le groupe additif des nombres rationnels modulo les entiers, soient les opérateurs μ_m définis sur $\mathcal{H}$ par $\mu_m \varepsilon_n = \varepsilon_m n$, soient les opérateurs $e(x)\varepsilon_n = \exp(2i\pi nx)\varepsilon_n$ pour $x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, l'algèbre des opérateurs bornés dans $\mathcal{H}$ engendrée par $(\mu_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ est notée B.

Rappelons que l'algèbre des opérateurs bornés $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ sur $\mathcal{H}$ est munie de la norme $\|T\| = sup_{\|v\|=1}\|Tv\|$, l'adhérence de B pour cette norme est notée $\mathcal{A}$ est va être une $\mathbb{C}^*$-algèbre qui va être à la base de la construction de Bost et Connes.

3.3 Evolution Hamiltonienne du Système

L'évolution hamiltonienne du système a déjà été introduite ci-dessus et est décrite par l'opérateur H dont on a défini l'opération sur les suites "'élémentaires"' par $H\varepsilon_n = ln(n)\varepsilon_n$.

On pose

$$\sigma_t(\mu_m) = m^{it}\mu_m$$

et

$$\sigma_t(e(x)) = e(x), \forall x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

Si $\beta > 1$, rappelons qu'un état de Gibbs du système nous est donné par

$$\varphi(x) = \frac{Trace(xe^{-\beta H})}{Trace(e^{-\beta H})}$$

4 Le Système Dynamique de Bost-Connes : ses symétries

La construction de Bost-Connes est appuyée sur des conceptions de dynamique symbolique, c'est-à-dire que l'on cherche à réaliser certaines propriétés en cherchant les espaces adéquats après-coup pour ainsi dire. De fait, Bost et Connes ont besoin de représenter leur algèbre abstraite $\mathbb{A}$ dans l'espace $\mathcal{H}$ introduit ci-dessus.

Nous choisissons de ne pas le justifier ici, mais l'ensemble des représentations de $\mathbb{A}$ dans $\mathcal{H}$ est indexé par $W = Gal(\mathbb{Q}^{cycl}/\mathbb{Q})$ où $\mathbb{Q}^{cycl}$ est l'extension cyclotomique maximale de $\mathbb{Q}$. On retrouvera ces considérations dans [Coh00].

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant:

THEOREME 1 (Bost-Connes [BoC95])
Le système dynamique $(\mathcal{A},\sigma_t)$ est muni du groupe de symétries W, l'action de W étant définie par $[u] \in Aut(\mathcal{A})$:

$$[u] : e(y) \longrightarrow e(y)^u, y \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, [u] : \mu_a \mapsto \mu_a^u = \mu_a, a \in \mathbb{N}$$

cette action commute à σ.

1. *Pour $0 < \beta \leq 1$, il y a un unique état KMS_β (cet étatt correspondant à un facteur de type III_1 de facteur associé R_∞)*

2. *Pour $\beta > 1$ et $u \in W$ l'état*

$$\varphi_{\beta,u}(x) = \zeta(\beta)^{-1} Trace(\pi_u(x)e^{-\beta H}), x \in \mathcal{A}$$

est un état KMS_β pour $(\mathcal{A},\sigma_t)$ (factoriel de type I_∞)

3. *la fonction ζ de Riemann est la fonction de partition du système $(\mathcal{A},\sigma_t)$*

Il reste à préciser que l'action de W sur $\mathcal{A}$ dans le cas $\beta > 1$ a des propriétés intéressantes puisqu'elle est transitive et que $u \longrightarrow \varphi_{\beta,u}$ réalise un homéomorphisme de W sur l'ensemble des points extrèmaux du simplexe des états KMS_β.

(Cette "'précision"' n'est là que pour citer de façon correcte le théorème de Bost et Connes.)

Une conclusion de cette approche

Pour synthétiser, ce théorème permet de comprendre la conjecture de Riemann comme une certaine forme de transition entre facteurs d'une algèbre de Von Neumann. Ceci dit, ce théorème a surtout été une motivation à de nouveaux travaux d'Alain Connes liant formule de Trace en géométrie non-commutative (c'est-à-dire le monde des algèbres de Von Neumann, des facteurs III_λ que nous n'avons qu'aperçus ici) et la conjecture de Riemann qui porte sur la fonction de partition (c'est-à-dire une certaine trace) d'un système réalisé comme algèbre de Von Neumann[1]. On trouvera les articles les plus récents d'Alain Connes sur le sujet sur le site référencé en bibliographie, en particulier l'article [Con96] qui progesse dans la direction ouverte par [BoC95].

Références

[BoC95] Bost, JB., Connes A., *Hecke Algebras, Type III factors and phase transitions with spontaneous symmetry breaking in number theory,* **Selecta Mat. (New Series), 1,** 411-457, 1995.

[Coh00] Cohen, Paula, B., *Sur la mécanique statistique d'après les travaux de Bost-Connes,* in **Les Nombres**Ellipses, 2000.

[Con96] Connes, A., *Formule de trace en Géométrie non-commutative et hypothèse de Riemann,* CRAS Paris Série I Math. **323**, 1231 - 1236, 1996.

[Dix69] Dixmier, J., *Les ALgèbres d'Opérateurs dans l'espace hilbertien (Algèbres de Von Neumann),*rééd. J. Gabay ed., 1969 (1996)

[Gui89] Guichardet, A., *Intégration, Analyse Hilbertienne,* Ellipses, 1989

[Par92] Parthasarathy, KR., *An introduction to Quantum Stochastic Calculus,* Monograph Math, **85** Birkhaüser, 1992.

On pourra consulter avec profit le site

`http://www.alainconnes.org/downloads.html`

1. Ici nous ne distinguons pas vraiment $\mathbb{C}^*$-algèbre et algèbre de Von Neumann et nous nous en excusons.